Condiciones de segundo orden

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Condiciones de suficiencia global

- Necesitamos condiciones que aseguren que un candidato es la solución.
  - Tal como lo hicimos en el capítulo anterior.

- La lógica será la misma que en el capítulo 4:
  - Revisaremos la función $\tilde{\mathcal{L}}$.
  - Revisaremos independientemente f y las restricciones g_j.
  - Y también tendremos un resultado con cuasiconcavidad.

Teorema (Condiciones de suficiencia global)

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{array}$$

con candidato $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ que cumple las condiciones de KKT. Definimos como antes el lagrangiano con λ_j^* fijado

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left[g_j(\mathbf{x}) - c_j \right]$$

Entonces, si $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ es cóncava, $\mathbf{x}^*$ es solución del problema.

Condiciones de suficiencia global

- Notar que si f es cóncava y g_j es convexa para todo j, $\tilde{\mathcal{L}}$ es cóncava.
  - Esto, porque λ_j^* no cambia la convexidad de g_j.
  - Ya que por KKT, $\lambda_j^* \geq 0$ siempre.
- Más aún, si la restricción j no está activa, $\lambda_j^* = 0$.
  - Y por lo tanto $\lambda_j^* g_j = 0$, que es convexa.
- Así, para utilizar el teorema basta con mirar f y las restricciones activas.

Ejemplo (Condiciones de suficiencia global)

En el ejemplo de ver series y jugar videojuegos resolvíamos el problema

$$\begin{aligned} \max_{v,s\in\mathbb{R}_+} \quad & \ln(v)+\ln(s) \\ \text{s.a.} \quad & 0{,}1v+0{,}2s\le 8 \\ & 10v+5s\le 350 \end{aligned}$$

Y obteníamos un único candidato $(v^*,s^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*)=\left(20,30,\frac{1}{225},\frac{1}{18}\right)$. ¿Es esta la solución?

En este caso ambas restricciones están activas y son funciones convexas (son lineales). La función objetivo es cóncava porque $\ln$ es una función cóncava y la suma de funciones cóncavas es cóncava. Con todo esto, el candidato encontrado es solución.

Teorema (Condiciones de suficiencia con cuasiconcavidad y convexidad)

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Supongamos que el punto $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ satisface las condiciones de KKT para el problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{x}^*$ resuelve el problema si

- $\mathbf{x}^*$ no es un punto crítico de f.
- f es cuasicóncava y $\lambda_j^* g_j$ es cuasiconvexa para todo j.

s Además, la primera condición puede obviarse si f es cóncava.

Condiciones de suficiencia global

- En este caso también ocurre lo mismo de antes.

- Si la condición j no está activa, $\lambda_j^* = 0$.
  - Y, por lo tanto $\lambda_j^* g_j = 0$, que es cuasiconvexa.

- Así, para utilizar el teorema basta con mirar f y las restricciones activas.

Ejercicio (Condiciones de suficiencia global)

Verifique las condiciones de suficiencia global para el ejercicio de la firma que produce al menos 30. Revise tanto el criterio de concavidad como el de cuasiconcavidad (*Ayuda: Puede apoyarse en un graficador para revisar los conjuntos de sobre/bajonivel.*)

Ejercicio (Condiciones de suficiencia global)

Verifique las condiciones de suficiencia global para el ejercicio de la montaña. Revise tanto el criterio de concavidad como el de cuasiconcavidad (*Ayuda: Puede apoyarse en un graficador para revisar los conjuntos de sobre/bajonivel.*)

Ejercicio (Condiciones de suficiencia global)

Verifique las condiciones de suficiencia global para el ejercicio de la silla de montar. Revise tanto el criterio de concavidad como el de cuasiconcavidad (*Ayuda: Puede apoyarse en un graficador para revisar los conjuntos de sobre/bajonivel.*)

Condiciones de suficiencia local

- En este caso también podemos clasificar a los puntos como óptimos locales.

- Para ello debemos definir, como en el capítulo 4, la matriz $\tilde{H}$.
  - Pero solo lo haremos con las restricciones **activas**.
  - Luego, si son las primeras k activas, $\tilde{H}$ es función de $(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Teorema (Condiciones de suficiencia local)

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \le c_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

con candidato $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ que cumple las condiciones de KKT. Supongamos que solo las primeras k restricciones están activas y sea $\tilde{H}^*$ la matriz $\tilde{H}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ evaluada en el candidato. Entonces, si para $\tilde{H}^*$

- los últimos $n-k$ menores principales dominantes alternan signo, y el último tiene el signo de $(-1)^n$, $\mathbf{x}^*$ es máximo local entre los puntos que cumplen las restricciones.
- los últimos $n-k$ menores principales dominantes tienen el mismo signo de $(-1)^k$, $\mathbf{x}^*$ es un mínimo local entre los puntos que cumplen las restricciones.

Condiciones de suficiencia local

- ¿Y qué pasa si no son las primeras restricciones las activas?
  - ¡Fácil! Reordenamos las restricciones para que las activas sean las primeras.

- O mejor, no movemos nada pero definimos $\tilde{H}$ solo con las que están activas.
  - Lo importante es que no se incorporen restricciones inactivas.

Ejemplo (Condiciones de suficiencia local)

En el ejemplo de la bandera resolvíamos el problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + 4y^2 \leq 16 \end{aligned}$$

Para el cual teníamos 5 candidatos obtenidos por las condiciones de KKT. En orden (x,y,λ) estos eran: $(0,0,0)$, $(-4,0,1)$, $(4,0,1)$, $\left(0,2,\frac{1}{4}\right)$ y $\left(0,-2,\frac{1}{4}\right)$. Salvo el primero, todos estos puntos tienen la restricción activa y, por lo tanto, la matriz $\tilde{H}$ es:

$$\tilde{H}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g_x(x,y) & g_y(x,y) \\ g_x(x,y) & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ g_y(x,y) & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 8y \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Condiciones de suficiencia local)

En ese momento dijimos que los óptimos eran $(-4,0)$ y $(4,0)$. Veamos qué pasa con los demás. Para $\left(0,2,\frac{1}{4}\right)$ tenemos

$$\tilde{H}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y revisamos los últimos $n-k=2-1=1$ menores principales dominantes, es decir, solo revisamos el determinante de H^*. En este caso

$$D_3 = \det \tilde{H}^* = -16^2 \cdot \frac{7}{2}$$

Que tiene el mismo signo de $(-1)^1 = -1$, luego este punto es un mínimo local entre los puntos que cumplen la restricción. En particular, no puede ser la solución del problema.

Ejemplo (Condiciones de suficiencia local)

Para $\left(0,-2,\frac{1}{4}\right)$ pasa algo similar

$$\tilde{H}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -16 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seguimos revisando solo el determinante de $\tilde{H}^*$ (porque la cantidad de restricciones activas, k, no ha cambiado). En este caso

$$D_3 = \det \tilde{H}^* = -16^2 \cdot \frac{7}{2}$$

Que tiene el mismo signo de $(-1)^1 = -1$, luego este punto es un mínimo local entre los puntos que cumplen la restricción. En particular, no puede ser la solución del problema.

Ejemplo (Condiciones de suficiencia local)

Algo distinto pasa con los los puntos que sí son óptimos. En $(4,0,1)$

$$\tilde{H}^* = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Seguimos revisando solo el determinante de $\tilde{H}^*$ (porque la cantidad de restricciones activas, k, no ha cambiado). En este caso

$$D_3 = \det \tilde{H}^* = -8 \cdot (-48) = 8 \cdot 48$$

Que tiene el mismo signo de $(-1)^2 = 1$, luego este punto es un máximo local entre los puntos que cumplen la restricción. Llegaremos a lo mismo con el punto $(-4,0,1)$.

Ejemplo (Condiciones de suficiencia local)

Finalmente, para el punto $(0,0,0)$ la única restricción no está activa, lo que equivale a decir que $(0,0)$ es un punto crítico de f. Luego, la matriz $\tilde{H}$ es solo la matriz Hessiana de f:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es definida positiva y por lo tanto $(0,0)$ es un mínimo local de f, por lo que no puede ser solución del problema.

En resumen, de los 5 candidatos encontrados a través de las condiciones de KKT, solo dos de ellos eran reales candidatos a solucionar el problema. Como por el teorema de Weierstrass el máximo debe existir y además estas condiciones encuentran TODOS los posibles candidatos, entonces debe ser cierto que alguna de las dos opciones es solución. Lo que ocurre en este caso es que *ambos* puntos solucionan el problema.

Ejercicio (Condiciones de suficiencia local)

Compruebe las condiciones de suficiencia local para todos los ejercicios y ejemplos anteriores.